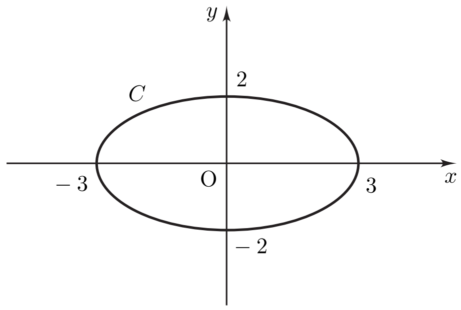
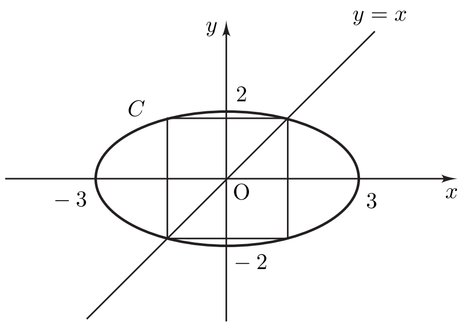
2024年度入試
A方式_第2期 (理学系)　数学 (2限)

I　(1) 曲線 C と x 軸との交点は $(\pm 3, 0)$ であり, y 軸との交点は $(0, \pm 2)$ である. 曲線 C の概形は下図の通りである。



(2) C と直線 $y = x$ との交点の x 座標は $x = \pm\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$ である。よって, 面積は $\dfrac{144}{13}$ で周の長さは $\dfrac{48\sqrt{13}}{13}$ である。



(3) C 上の第 1 象限内の点は $(3\cos\theta, 2\sin\theta)$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と書けるので, $a = 3, b = 2$ である。

(4) 長方形 D の横の長さと縦の長さの比を $p : q$ とする。第 1 象限内にある D の頂点の座標を $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ とするとき, $3\cos\alpha : 2\sin\alpha = p : q$ なので, $3q\cos\alpha = 2p\sin\alpha$ となる。これより $\tan\alpha = \dfrac{3q}{2p}$ である。

(5) C 上の点 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を第 1 象限内にある D の頂点とする。D の面積を $S(\theta)$, 周の長さを $L(\theta)$ とすると,

$$S(\theta) = 4(3\cos\theta \cdot 2\sin\theta) = 12(2\sin\theta\cos\theta) = 12\sin 2\theta$$

である。周の長さは

$$L(\theta) = 4 \cdot 3\cos\theta + 4 \cdot 2\sin\theta = 12\cos\theta + 8\sin\theta$$

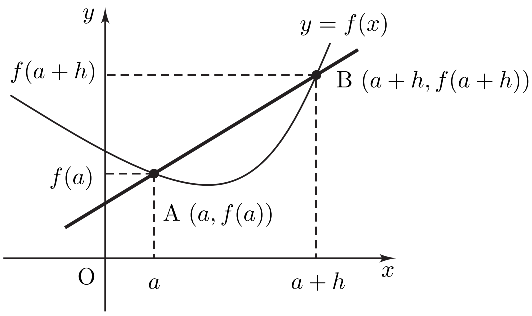
である。

(6) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で $S(\theta) = 12\sin 2\theta$ は, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値をとる. (4) より $\dfrac{3q}{2p} = \tan\theta = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$ なので, [横の長さ] : [縦の長さ] $= p : q = 3 : 2$ である。最大値は $S\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 12$ である。

(7) $L(\theta) = 4 \cdot 3\cos\theta + 4 \cdot 2\sin\theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を θ で微分して $L'(\theta) = -12\sin\theta + 8\cos\theta$ を得る。よって, $L'(\theta) = 0$ となる θ は $\tan\theta = \dfrac{2}{3}$ である。グラフの増減から $\tan\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき最大となる。(4) より $\dfrac{3q}{2p} = \tan\theta = \dfrac{2}{3}$ なので, [横の長さ] : [縦の長さ] $= p : q = 9 : 4$ である。

$\tan\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき, $\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より, $\cos^2\theta = \dfrac{9}{13}$ を得る。従って, $\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$. また, $\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$ だから, 最大値は $L(\theta) = 12 \times \dfrac{3}{\sqrt{3}} + 8 \times \dfrac{2}{\sqrt{13}} = 4\sqrt{13}$ である。

II　(1) 下図のように, 座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(a, f(a))$ と $\mathrm{B}(a+h, f(a+h))$ を通る直線の傾きを意味する。



(2)

$$\begin{aligned} f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3-a^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3a^2h+3ah^2+h^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(3a^2+3ah+h^2) = 3a^2 \end{aligned}$$

(3)　$f'(a) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{-h}{(a+h)ah} = \lim_{h\to 0}\dfrac{-1}{(a+h)a} = -\dfrac{1}{a^2}$

(4)

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin a\cos h+\sin h\cos a-\sin a}{h} \qquad \text{（加法定理より）} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\cos a\cdot\frac{\sin h}{h}-\sin a\cdot\frac{1-\cos h}{h}\right) \\ &= \cos a\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} \end{aligned}$$

設問で与えられた極限公式により

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1 \\ \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 h}{h(1+\cos h)} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{\sin h}{1+\cos h} = 1\times\frac{0}{2} = 0 \end{cases}$$

だから, $f'(a) = (\cos a)\times 1-(\sin a)\times 0 = \cos a$.

(6)

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{\log(a+h) - \log a}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{a}\right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{a} \frac{a}{h} \log\left(1 + \frac{h}{a}\right) \\
&= \frac{1}{a} \lim_{h \to 0} \log\left(1 + \frac{h}{a}\right)^{\frac{a}{h}} \\
&= \frac{1}{a} \lim_{k \to 0} \log(1+k)^{\frac{1}{k}} \qquad \left(k := \tfrac{h}{a} \text{ とおいた}\right) \\
&= \frac{1}{a} \log \lim_{k \to 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} \\
&= \frac{1}{a} \log e \qquad (e \text{ の定義より}) \\
&= \frac{1}{a}
\end{aligned}
$$